ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 45, No. 1, 1983

CALCUL FONCTIONNEL A PLUSIEURS VARIABLES POUR DES OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS DANS $\mathbf{R}^n$

PAR

ANNE-MARIE CHARBONNEL

ABSTRACT

We study a C^∞ functional calculus with several variables foı ν pseudodifferential operators $P_1, \cdots, P_\nu$ in $\mathbf{R}^n$. When f is a function belonging to the class $S^r_{1,0}(\mathbf{R}^\nu)$ of Hörmander, we prove that, under some conditions, $f(P_1, \cdots, P_\nu)$ is a pseudodifferential operator, and we give an asymptotic formula for its symbol.

Introduction

Dans [4], Y. Colin de Verdière étudie le comportement asymptotique du spectre conjoint de plusieurs opérateurs pseudodifférentiels commutant deux à deux, opérant sur une variété compacte. Lors de cette étude, il utilise de manière essentielle le calcul fonctionnel établi dans ce cadre par R. S. Strichartz [12]. Dans [3] on établit, pour des opérateurs pseudodifférentiels opérant dans R^n, un résultat analogue à celui de [4], en reprenant la méthode de Y. Colin de Verdière. On est donc amené à établir un calcul fonctionnel pour ce type d'opérateurs. La nature des fonctions utilisées (qui peuvent être des fonctions de troncature, comme dans le théorème 2) conduit à fonder ce calcul sur les propriétés spectrales des opérateurs, le calcul fonctionnel holomorphe ne pouvant évidemment pas s'appliquer.

Les opérateurs dont on étudie dans [3] le spectre conjoint sont du type suivant:

EXEMPLE 1.

$$\begin{cases} P_1(x, D_x) = -\dfrac{h^2}{2m}\Delta + |x|^2, \\ \\ P_2(x, D_x) = \dfrac{1}{i}\left(x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1}\right) \qquad \text{où } x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3. \end{cases}$$

Received November 19, 1981 and in revised form February 15, 1982

P_1 est l'oscillateur harmonique, et iP_2 le générateur infinitésimal du groupe des rotations par rapport à Ox_3.

En mécanique quantique, l'étude du spectre conjoint de P_1 et P_2 permet de faire une classification des états de la particule (cf. par exemple A. Messiah, *Mécanique quantique*, tome 2, Dunod, 1972).

EXEMPLE 2.

$$\begin{cases} P_1(x, D_x) = -\partial_{x_1}^{2k} + x_1^{2l} \\ \\ P_2(x, D_x) = -\partial_{x_2}^{2k} + x_2^{2l} \end{cases} \quad \text{où } x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Les opérateurs de ce type notamment l'oscillateur anharmonique: $-\partial^2/\partial x^2 + \alpha x^2 + \beta x^4$, interviennent en physique. On peut se référer par exemple à A. Voros [13], où à B. Simon (*Coupling constants for the anharmonic oscillator*, Ann. Phys. 58.76.136 (1970)).

Le contexte de notre étude est le suivant:

On se donne ν opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbf{R}^n$, soit $(P_i)_{i=1,\cdots,\nu}$, commutant 2 à 2 et symétriques, définis par des symboles de Weyl $(P_i)_{i=1,\cdots,\nu}$ qui vérifient les hypothèses suivantes:

(H.1) $p_i \in S^m_{\phi,\varphi}$

où $S^m_{\phi,\varphi}$ désigne la classe des symboles d'ordre $m \in \mathbf{R}$ par rapport à un couple de fonctions poids (ϕ, φ) vérifiant les conditions de R. Beals [1] et de L. Hörmander [8], et la condition suivante:

(H.2) Il existe des constantes C_0, C_1, δ_0, $\delta_1 > 0$ telles que:

$$C_0(1 + |x| + |\xi|)^{\delta_0} \leqq \phi(x, \xi), \qquad \varphi(x, \xi) \leqq C_1(1 + |x| + |\xi|)^{\delta_1}.$$

On suppose aussi que le symbole q de l'opérateur Q défini par:

$$Q = \sum_{i=1}^{\nu} P_i^2 \tag{0.1}$$

vérifie la condition:

(H.3) Il existe $m' : 0 < m' \leqq m$, et des constantes C, $C' > 0$, tels que:

$$q(x, \xi) \geqq C(\phi\varphi)^{m'} \qquad \text{pour tout } (x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n} \quad \text{tel que } |(x, \xi)| \geqq C'.$$

Enfin les symboles p_i vérifient l'estimation:

(H.4) $$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2, \qquad \exists C_{\alpha,\beta} > 0, \qquad \forall i = 1, \cdots, \nu,$$

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta p_i(x, \xi)| \leqq C_{\alpha\beta} |q|^{1/2} \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|} \qquad \text{pour } |(x, \xi)| \text{ suffisamment grand.}$$

Sous les hypothèses précédentes, Q admet une unique réalisation auto-adjointe dans $L^2(\mathbf{R}^n)$, et $(I+Q)$ est d'inverse compact. Q possède donc un spectre composé d'une suite croissante de valeurs propres tendant vers $+\infty$, et il existe dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ une base orthonormale composée de fonctions propres de Q. Alors, comme les opérateurs P_i commutent entre eux et avec Q, on peut trouver une base $(\varphi^j)_{j\in\mathbf{N}}$ de $L^2(\mathbf{R}^n)$ composée de fonctions propres communes aux opérateurs P_i et Q. On définit le spectre joint (cf. [4]) des opérateurs $P_1,\cdots,P_\nu$ comme étant la partie Λ de $\mathbf{R}^\nu$ vérifiant:

$$(0.2)\qquad \Lambda=\{\lambda=(\lambda_i)_{i=1,\cdots,\nu}\in\mathbf{R}^\nu;\ \exists j\in\mathbf{N}\colon P_i\varphi^j=\lambda_i\varphi^j\ \forall i=1,\cdots,\nu\}.$$

On notera λ^j le ν-uplet de valeurs propres correspondant à la fonction φ^j. Soit alors f une fonction appartenant à la classe $s^r_{1,0}(\mathbf{R}^\nu)$ de L. Hörmander, avec $r\in\mathbf{R}$, i.e., satisfaisant à la condition:

$$(0.3)\qquad |f^{(\alpha)}(z)|\leqq C_\alpha(1+|z|)^{r-|\alpha|},\qquad \forall z\in\mathbf{R}^\nu,\quad \forall\alpha\in\mathbf{N}^\nu.$$

On définit, et l'on note $f(P_1,\cdots,P_\nu)$, un opérateur non borné dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ par:

$$(0.4)\qquad f(P_1,\cdots,P_\nu)\varphi^j=f(\lambda_1^j,\cdots,\lambda_\nu^j)\varphi^j\qquad \forall j\in\mathbf{N}.$$

$f(P_1,\cdots,P_\nu)$ a pour domaine:

$$(0.5)\qquad D[f(P_1,\cdots,P_\nu)]=\left\{u=\sum_{j\in\mathbf{N}}u_j\varphi^j\in L^2(\mathbf{R}^n);\ \sum_{j\in\mathbf{N}}|u_jf(\lambda^j)|^2<+\infty\right\}.$$

On se propose de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses ci-dessus, $f(P_1,\cdots,P_\nu)$ est un opérateur pseudodifférentiel, d'ordre rm si r est positif, $m'r$ si r est négatif, par rapport au couple, i.e., dont le symbole appartient à $S^{\max(mr,m'r)}_{\Phi,\varphi}$.*

De plus, sous l'hypothèse

(H.5) *p_i admet un développement asymptotique $p_i\sim\sum_{j\geq 0}a^i_j$ où $a^i_j\in S^{m-j/2}_{\Phi,\varphi}$*

le symbole a_f de $f(P_1,\cdots,P_\nu)$ admet un développement asymptotique sous la forme:

$$(0.6)\qquad a_f\sim\sum_{j\geqq 0}a_{f,j}\qquad \text{avec } a_{f,j}\in S^{\max(mr,m'r)-j/2}_{\Phi\varphi}.$$

On peut alors préciser la forme des composantes:

$$(0.7)\qquad \begin{cases} a_{f,0}=f(a_0)\\ a_{f,1}=\langle(\nabla f)(a_0),a_1\rangle\\ a_{f,j}=\displaystyle\sum_{|h|\leqq[3j/2]}D_{jh}(p)f^{(h)}(a_0)\end{cases}$$

où p désigne le symbole total joint des opérateurs P_i : $p = (p_1, \cdots, p_\nu)$, a_0 désigne le symbole principal joint: $a_0 = (a_0^1, \cdots, a_0^\nu)$, et $D_{jh}(p)$ est un polynôme fonction des a_j^i et de leurs dérivées, indépendant de f, et vérifiant l'estimation:

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta D_{jh}(p)| \leqq C_{j\alpha\beta} |a_0|^{|h|} (\phi\varphi)^{-j/2} \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}. \tag{0.8}$$

Remarque 1. Un cas particulier important de l'hypothèse (H.5) est celui où les symboles p_i admettent un développement en composantes "homogènes", i.e., $\forall i = 1, \cdots, \nu$, $\forall j \in \mathbf{N}$, on a:

$$a_j^i(\rho x, \rho\xi) = \rho^{2m-j} a_j^i(x, \xi) \qquad \forall \rho > 0, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n} - \{0\}, \tag{0.9}$$

qui correspond à $\varphi(x, \xi) = \phi(x, \xi) = 1 + |x| + |\xi|$.

Remarque 2. On peut remarquer que, à un opérateur à noyau dans $\varphi(\mathbf{R}^{2n})$ près, l'opérateur $f(P_1, \cdots, P_\nu)$ ne dépend que des valeurs de f sur un voisinage de l'image du symbole principal joint a_0.

Un calcul fonctionnel pour des opérateurs pseudodifférentiels sur une variété compacte a été fait par R. Strichartz [12]. On reprend ici sa méthode.

Par ailleurs, D. Robert [10] étudie la fonction d'opérateurs $f[A(h)]$ lorsque f est un symbole de la classe $S_{1,0}^r(\mathbf{R})$, et $A(h)$ un opérateur pseudodifférentiel dépendant d'un paramètre h. (B. Helffer et D. Robert avaient étudié dans [7] le cas où $f(z) = z^s$ avec $s \in \mathbf{R}$.) En donnant à h la valeur 1, on a un calcul fonctionnel pour un opérateur pseudodifférentiel dans $\mathbf{R}^n$ sur lequel on s'appuiera dans ce qui suit. En particulier, les formules (0.7) exprimant les composantes du développement asymptotique du symbole a_f, plus précises que celles que donne R. Strichartz [12], sont une généralisation de celles qu'obtient D. Robert dans [10].

Le plan de notre étude est le suivant: Dans une première partie, on exprime, par la formule de Taylor, le symbole de Weyl a_f de $f(P_1, \cdots, P_\nu)$ sous la forme d'une somme finie de termes S_j et d'un reste R_N. Dans une seconde partie, on définit une notion de "symbole formel" (cf. L. Boutet de Monvel – P. Kree [2]), et on établit un calcul fonctionnel sur ces symboles destiné à permettre l'étude des termes S_j. On y démontre en particulier une expression du symbole de $a^{(s)}$, puissance s^e de a, où a est un symbole formel et s un entier, correspondant à celle obtenue par D. Robert [10], qui sera utile pour obtenir au paragraphe suivant les composantes $a_{f,j}$. On achève alors la démonstration du théorème 1 en estimant le reste R_N. Enfin, dans une dernière partie, on donne une application directe du théorème 1 à l'étude de Λ.

REMARQUE. Il est possible de considérer des opérateurs p_i d'ordres différents, soit $m_1, \cdots, m_\nu$, en supposant que ces ordres satisfont à la condition (cf. [12]):

$$\exists t \in \mathbf{R}: \qquad s_i = \frac{t}{m_i} \in \mathbf{N} \qquad \forall i = 1, \cdots, \nu.$$

On se ramène au cas étudié ci-dessus en faisant les hypothèses (H_3) et (H_4) non plus sur $Q = \Sigma_{i=1}^{\nu} P_i^2$, mais sur $\tilde{Q} = \Sigma_{i=1}^{\nu} P_i^{2s_i}$.

I. Présentation du problème

On suit la technique de R. Strichartz [12].

A l'aide de la transformée de Fourier, on écrit:

$$[f(P_1, P_2, \cdots, P_\nu) . \varphi^i](x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y,\xi)} f(\lambda^i) \varphi^i(y) dy d\xi. \tag{1.1}$$

En développant f suivant la formule de Taylor au point $a_0(\frac{1}{2}(x+y), \xi)$, où $a_0 = (a_0^1, \cdots, a_0^\nu)$, on obtient:

$$[f(P_1, \cdots, P_\nu)\varphi^i](x) =$$

$$\begin{aligned} &\sum_{|k|<N} \frac{1}{k!} \int e^{i(x-y,\xi)} f^{(k)} \left[a_0\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)\right]\left[\lambda^i - a_0\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)\right]^k \varphi^i(y) \,đy d\xi \\ &+ N \sum_{|k|=N} \frac{1}{k!} \int e^{i(x-y,\xi)} f^{(k)} \left\{a_0\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) + t\left[\lambda^i - a_0\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)\right]\right\} \\ &\qquad \times \left(\lambda^i - a_0\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)\right)^k (1-t)^N \varphi^i(y) dt \,đy d\xi \end{aligned} \tag{1.2}$$

(où on note $đy = (2\pi)^{-n} dy$).

Appliquons la formule du binôme à $(\lambda^i - a_0)^k$:

$$(\lambda^i - a_0)^k = \sum_{l \leqq k} (-1)^l \binom{k}{l} (\lambda^i)^{k-l} a_0^l \qquad \text{avec } a_0^l = (a_0^1)^{l_1} \times \cdots \times (a_0^\nu)^{l_\nu} \tag{1.3}$$

où $l \leqq k$ signifie $l_i \leqq k_i$ $\forall i = 1, \cdots, \nu$ et où $\binom{k}{l} = k!/l!(k-l)!$ avec $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_\nu!$ si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\nu)$ et écrivons

$$(\lambda^i)^{k-l} \varphi^i = P^{k-l} \varphi^i \qquad \text{avec } P^{k-l} = P_1^{k_1-l_1} \circ P_2^{k_2-l_2} \circ \cdots \circ P_\nu^{k_\nu-l_\nu}. \tag{1.4}$$

Nous obtenons alors $f(P_1, \cdots, P_\nu)$ sous la forme:

$$f(P_1, \cdots, P_\nu) = \sum_{j=0}^{N-1} opS_j + R_N \tag{1.5}$$

avec

$$S_j = \sum_{|k|=j} \frac{1}{k!} \sum_{l \leqq k} (-1)^l \binom{k}{l} [f^{(k)}(a_0) \times a_0^l] \# p^{(k-l)} \tag{1.6}$$

où $\#$ désigne la composition des symboles de Weyl, p est le symbole total de $(P_1, \cdots, P_\nu)$: $p = (p_1, \cdots, p_\nu)$, et $p^{(k-l)} = p_1^{(k_1-l_1)} \# \cdots \# p_\nu^{(k_\nu-l_\nu)}$, avec

$$p_i^{(k_i-l_i)} = \underbrace{p_i \# \cdots \# p_i}_{(k_i - l_i)\text{ fois}}.$$

On va prouver les points suivants:

(i) $S_j \in S_{\phi,\varphi}^{\max(mr, m'r)-j/2}$

(ii) $\forall N \in \mathbf{N}\ \exists M : R_M \in \mathscr{L}(H_{\phi,\varphi}^{-N}(\mathbf{R}^n), H_{\phi,\varphi}^{N}(\mathbf{R}^n))$ où $H_{\phi,\varphi}^{s}(\mathbf{R}^n)$ est l'espace défini pour $s \in \mathbf{R}$ par R. Beals [1].

L'assertion (i) est une conséquence du calcul formel que l'on va faire maintenant.

II. Calcul formel

X étant une indéterminée, et (x, ξ) un point de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, on appelle "symbole formel" toute fonction a de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{C}[[X]]$ s'écrivant sous la forme:

$$[a(x,\xi)](X) = \sum_{j \geqq 0} X^j a_j(x,\xi) \tag{2.1}$$

où les fonctions a_j sont C^∞ sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ e vérifient:

$$\begin{cases} |a_0| \leqq C_0(\phi\varphi)^m, & m \in \mathbf{R}, \\ |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_j(x,\xi)| \leqq C_{j\alpha\beta}(\phi\varphi)^{m-j/2}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|} & \forall j \geqq 0, \quad \forall(\alpha,\beta) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n \end{cases} \tag{2.2}$$

(ϕ, φ) étant un couple de fonctions poids satisfaisant à (H_2).

On note $S_{\phi,\varphi}^{m,F}$ l'ensemble des symboles formels satisfaisant à (2.1) et (2.2).

Remarquons d'abord que l'on peut toujours associer au symbole total p_i de i un symbole formel de $S_{\phi,\varphi}^{m,F}$. Les principales correspondances sont les suivantes:

(a) $P_i \to a^i$: $a_0^i = p_i$, $a_j^i = 0\ \forall j \geqq 1$.

(b) Si on fait sur p_i l'hypothèse suivante:

$$\begin{cases} \exists p_0^i \text{ et } p_1^i \text{ tels que } p_i = p_0^i + p_1^i \\ \text{avec } \forall j = 0,1\ \forall(\alpha,\beta) \in \mathbf{N}^{2n}\ \exists C_{\alpha\beta} > 0: \end{cases}$$

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta p_j^i| \leqq C_{\alpha\beta}(\phi\varphi)^{m-j/2}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|}$$

on associe alors à p_t le symbole formel a^t défini par:

$$a_0^t = p_0^t, \quad a_1^t = p_1^t, \quad a_j^t = 0 \qquad \forall j \geqq 2.$$

(c) Enfin, si on suppose que les symboles p_t sont des symboles classiques admettant un développement asymptotique en composantes homogènes, i.e.:

$$p_t \sim \sum_{j \geqq 0} a_j^t,$$

il est alors naturel d'associer à p_t le symbole formel a_t défini par:

$$[a_t(x,\xi)](X) = \sum_{j \geqq 0} X^j a_j^t(x,\xi).$$

Nous allons maintenant établir des règles de calcul pour les symboles de $S^{m,F}_{\phi,\varphi}$.

(1°) Composition des symboles formels

Si a et b sont deux symboles formels, le premier dans $S^{m_1,F}_{\phi,\varphi}$, le second dans $S^{m_2,F}_{\phi,\varphi}$, on définit le composé $c = a \# b$ de la façon suivante:

$$[(a \# b)(x,\xi)](X) = \sum_{j \geqq 0} X^j c_j(x,\xi) \tag{2.3}$$

avec

$$c_j(x,\xi) = \sum_{2|\alpha+\beta|+l+k=j} \frac{1}{\alpha!}\frac{1}{\beta!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{|\alpha|}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{|\beta|}(\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_k)(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha b_l). \tag{2.4}$$

En particulier, on a:

$$\begin{cases} c_0 = a_0 b_0, \\ c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1. \end{cases} \tag{2.5}$$

On obtient facilement le résultat suivant:

Proposition 1. *La loi $\#$ envoie $S^{m_1,F}_{\phi,\varphi} \times S^{m_2,F}_{\phi,\varphi}$ dans $S^{m_1+m_2,F}_{\phi,\varphi}$.*

(2°) Puissance d'ordre s d'un symbole formel

Soit $a \in S^{m,F}_{\phi,\varphi}$, *et* $s \in \mathbf{N}$. On désigne par $a^{(s)}$ le composé:

$$a^{(s)} = \underbrace{a \# a \# \cdots \# a}_{s \text{ fois}}$$

D'après (1°), $a^{(s)}$ est un symbole formel de $S^{ms,F}_{\phi,\varphi}$ dont on écrit le développement sous la forme:

$$(2.6) \qquad [a^{(s)}(x,\xi)](X) = \sum_{j\geqq 0} X^j a_{j,s}(x,\xi).$$

Le but de ce qui suit est la démonstration de la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Soit $a \in S^{m,F}_{\phi,\varphi}$ et $s \in \mathbf{N}$. Alors les coefficients du développemer (2.6) de $a^{(s)}$ sont donnés par les formules:*

$$(2.7) \qquad \begin{cases} a_{0,s} = a_0^s \\ a_{j,s} = \sum_{k=1}^{j} \dfrac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!} d_{j,k}(a) a_0^{s-k}, \quad j \geqq 1, \end{cases}$$

où $d_{j,k}$ est un polynôme indépendant de s, fonction des termes a_j et de leurs dérivée. vérifiant les estimations:

$$(2.8) \qquad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta d_{j,k}(a)| \leqq C_{j\alpha\beta} (\phi\varphi)^{mk-j/2} \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}.$$

De plus, si a vérifie

$$(2.9) \qquad \exists B_0 \in S^m_{\phi,\varphi}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) \colon |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_j(x,\xi)| \leqq C_{j\alpha\beta} |B_0| (\phi\varphi)^{-j/2} \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}$$

pour $|(x,\varphi)|$ suffisamment grand, alors (2.8) devient:

$$(2.10) \qquad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta d_{j,k}(a)| \leqq C_{j\alpha\beta} |B_0|^k (\phi\varphi)^{-j/2} \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}$$

pour tout (x,ξ) tel que $|(x,\xi)|$ soit suffisamment grand.

DÉMONSTRATION. On pourrait penser que la méthode la plus directe consi: à utiliser les formules (2.5) et à faire une récurrence sur s. En fait, il ne semb pas que cela soit aisé, et on va utiliser une tout autre démarche, et faire cet démonstration en trois étapes:

(a) On commence par démontrer la proposition 2 dans le cas où le symbc considéré a satisfait en plus aux hypothèses suivantes:

(H.6) $\exists C_0 : a_0(x,\xi) > c_0 > 0 \ \forall (x,\xi)$. (Il existe alors un secteur Λ, voisinage $]-\infty, 0]$ dans $\mathbf{C}$, tel que $|a_0 - \lambda| \geqq C(|a_0| + |\lambda|)$ pour tout λ dans Λ.)

(H.7) $\exists C_1$, $m' > 0$ tels que $a_0 \geqq C_1(\phi\varphi)^{m'}$ pour $|(x,\xi)|$ suffisamment granc

(H.8) $\exists C_2 > 0 \quad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbf{N}^{2n} \ |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_j(x,\xi)| \leqq C_{j\alpha\beta} a_0 (\phi\varphi)^{-j/2} \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}$ pc $|(x,\xi)|$ suffisamment grand.

Pour un tel symbole, on définit en suivant [9] un inverse formel et u puissance d'ordre s, $s \in \mathbf{C}$.

(α) *Inverse formel*

On démontre, comme dans [10], le résultat suivant:

Pour tout λ dans Λ, il existe $b_\lambda \in S_{\phi,\varphi}^{-m',F}$ tel que

$$\{[(a-\lambda)\#b_\lambda](x,\xi)\}(X) \equiv 1$$

b_λ vérifie

$$[b_\lambda(x,\xi)](X) = \sum_{j\geqq 0} X^j b_{j,\lambda}(x,\xi) \tag{2.11}$$

avec

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta b_{j,\lambda}(x,\xi)| \leqq C_{j\alpha\beta}|b_{0,\lambda}|(\phi\varphi)^{-j/2}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|} \quad \forall j \geqq 0 \quad \forall(\alpha,\beta)\in \mathbf{N}^2. \tag{2.12}$$

(β) *Puissances complexes d'un symbole formel*

Sous les mêmes hypothèses sur a, et pour $s \in \mathbf{C}$, on définit la puissance s^e de a comme étant le symbole formel $a^{(s)}$ satisfaisant à:

(i) *Pour* $\operatorname{Re} s < 0$

$$[a^{(s)}(x,\xi)](X) = \sum_{j\geqq 0} X^j a_{j,s}(x,\xi) \tag{2.13}$$

avec

$$a_{j,s}(x,\xi) = \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^s b_{j,\lambda}(x,\xi)\,d\lambda \tag{2.14}$$

où Γ est un contour dans Λ, entourant $]-\infty,0]$, simple, et de classe C^1 par morceaux.

(ii) *Pour* $k \leqq \operatorname{Re} s < k+1$ $(k \in \mathbf{N})$

$$a^{(s)} = a^{(k+1)}\#a^{s-(k+1)} \tag{2.15}$$

où

$$a^{(k)} = \underbrace{a\#a\#\cdots\#a}_{k \text{ fois}}$$

La proposition suivante permet de préciser l'expression de $a^{(s)}$:

PROPOSITION 3. *On suppose vérifiées les hypothèses* (H.1) *à* (H.8). *Alors, pour tout s dans $\mathbf{C}$, le symbole formel $a^{(s)}$ défini par* (2.13), (2.14) *et* (2.15) *appartient à* $S_{\phi,\varphi}^{\max(m\operatorname{Re}s,\, m'\operatorname{Re}s),F}$.

De plus, si s appartient à $\mathbf{N}$, $a^{(s)}$ coincide avec

$$\underbrace{a\#a\cdots\#a}_{s \text{ fois}},$$

et $a^{(-1)}$ *coincide avec l'inverse formel de a.*

Enfin, on peut écrire (2.13) *pour tout* $s \in \mathbf{C}$, $a_{j,s}$ *satisfaisant à*:

$$(2.16)\qquad \begin{cases} a_{0,s} = a_0^s, \\ a_{j,s} = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}\, d_{j,k}(a) a_0^{s-k} \quad \textit{pour } j \geqq 1, \end{cases}$$

où $d_{j,k}$ *est un polynôme indépendant de s, fonction des termes* a_j *et de leurs dérivées, vérifiant les estimations*:

$$(2.17)\qquad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta d_{j,k}(a)| \leqq C_{j\alpha\beta} |a_0|^k (\phi\,.\,\varphi)^{-j/2} \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}.$$

La démonstration de cette proposition est analogue au calcul fait par D. Robert [10], et B. Helffer–D. Robert [7].

La proposition 2 n'est, dans ce cas, qu'un cas particulier de la proposition 3.

(b) *2^e^ étape.* On considère maintenant un symbole $a \in S^{m,F}_{\phi,\varphi}$, satisfaisant encore à (H.7) et (H.8), mais on remplace l'hypothèse (H.6) par:

(H.6)′ a_0 est minoré sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Il existe alors $C > 0$ tel que $a_0(x,\xi) + C > 0$ pour tout $(x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Les estimations annoncées dans la proposition 2 découlent alors du lemme suivant:

LEMME 4. *Si* $b \in S^{m,F}_{\phi,\varphi}$ *satisfait au résultat de la proposition* 4, *il en est alors de même pour le symbole* $c = b + K$, *quelle que soit la constante K.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 4. Pour $s \in \mathbf{N}$, $c^{(s)} \in S^{ms,F}_{\phi,\varphi}$ et on peut écrire:

$$(2.18)\qquad [c^{(s)}(x,\xi)](X) = \sum_{j\geqq 0} X^j c_{j,s}(x,\xi).$$

Par ailleurs, on connaît la forme des termes $b_{j,s}(x,\xi)$ du développement de $b^{(s)}$:

$$\begin{cases} b_{0,s}(x,\xi) = b_0^s(x,\xi), \\ b_{j,s}(x,\xi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!} [d_{j,k}(b)](x,\xi) b_0^{s-k}(x,\xi) \quad \forall j \geqq 1. \end{cases}$$

Le calcul de $d_{j,k}(b)$ montre que c'est une fonction de $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b_i$ pour $i + |\alpha + \beta|$ 1. b_0 n'intervient donc que par ses dérivées. On a donc:

$$(2.19)\qquad d_{j,k}(b) = d_{j,k}(c).$$

De plus, on peut écrire $c^{(s)} = \sum_{p=0}^{s} \binom{p}{s} b^{(s-p)} K^p$, d'où l'on déduit la forme de $c_{j,s}$:

$$(2.20)\qquad \begin{cases} c_{0,s} = \sum_{p=0}^{s} \binom{p}{s} K^p b_{0,s-p} = (b_0 + K)^s = c_0^s, \\ c_{j,s} = \sum_{p=0}^{s} \binom{p}{s} K^p b_{j,s-p} \quad \forall j \geqq 1. \end{cases}$$

Pour $j \geqq 1$, en reportant dans $c_{j,s}$ l'expression de $b_{j,s-p}$, en inversant l'ordre des sommations, et en remarquant que le produit $(s-p)(s-p-1)\cdots(s-p-k+1)$ est nul si $p \geqq s-k+1$, on obtient pour $c_{j,s}$ la formule (2.7).

De plus, l'hypothèse (2.9) et l'estimation (2.10) sont vérifiées pour $(b+K)$ dès qu'elles le sont pour b.

Le lemme est ainsi démontré.

(c) *3^e étape.* Soit maintenant a un symbole de $S^{m,F}_{\phi,\varphi}$, et $(x_0, \xi_0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Soit χ une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, identique à 1 dans un voisinage V de (x_0, ξ_0), et nulle à l'extérieur d'un voisinage W de (x_0, ξ_0) contenant V. Soit $\tilde{a} = \chi a + (1-\chi)b$, où b est une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ se comportant pour $|(x,\xi)|$ grand comme $(\phi\varphi)^m$ (cf. [1] pour l'existence d'une telle fonction).

Alors $\tilde{a}$ satisfait aux conditions de la 2^e étape.

On peut donc écrire:

$$[\tilde{a}(x,\xi)](X) = \sum_{j \geqq 0} X^j \tilde{a}_{j,s}(x,\xi)$$

avec

$$(2.21)\qquad \tilde{a}_{j,s} = \sum_{k=1}^{j} \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!} d_{j,k}(\tilde{a})(\tilde{a}_0)^{s-k}.$$

En écrivant (2.21) au point (x_0, ξ_0) on obtient:

$$d_{j,k}(\tilde{a})(x_0,\xi_0) = d_{j,k}(a)(x_0,\xi_0),$$

$$(\tilde{a}_0)^{s-k}(x_0,\xi_0) = a_0^{s-k}(x_0,\xi_0).$$

Comme par ailleurs les séries formelles $\tilde{a}(x,\xi)$ et $a(x,\xi)$ coïncident en (x_0,ξ_0), on obtient pour a la formule (2.7), et l'estimation (2.8).

Pour les mêmes raisons, si $|(x_0,\xi_0)|$ est suffisamment grand, l'hypothèse (2.9) implique l'estimation (2.10).

La proposition 2 est ainsi démontrée.

III. Fonction de plusieurs symboles formels

Pour étudier la régularité des termes S_j, on va définir, en s'inspirant de leur forme, une fonction de plusieurs symboles formels. Soit f satisfaisant à l'hypothèse (0.3), et $(a_i)_{i=1,\dots,\nu}$, ν symboles formels de la classe $S^{m,F}_{\phi,\varphi}$.

On suppose que les coefficients a'_j du développement de a' satisfont à l'hypothèse (2.9) sous la forme:

(3.1) $\forall j \geqq 0 \quad \forall(\alpha,\beta)\in \mathbf{N}^{2n} \quad \exists C_{j\alpha\beta}>0 \qquad |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a'_j| \leqq C_{j\alpha\beta}\,|a_0|(\phi\varphi)^{-j/2}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|}$

pour $|(x,\xi)|$ suffisamment grand, où $|a_0| = |(a_0^1,\cdots,a_0^\nu)|$.

Définition. Si $a_{(x,\xi)}^{(k-l)}(X)$ est le symbole formel égal à:

$$a^{(k-l)} = a_1^{(k_1-l_1)} \# \cdots \# a_\nu^{(k_\nu-l_\nu)} \tag{3.2}$$

où $a_i^{(k_i-l_i)}$ est la puissance d'ordre (k_i-l_i) de a_i (cf. II), on définit alors:

$$f(a_1,\cdots,a_\nu) = \sum_{j\geqq 0}\sum_{|k|=j}\frac{1}{k!}\sum_{l\leqq k}(-1)^l\binom{k}{l}\{f^{(k)}(a_0)a_0^l\}\# a^{(k-l)} \tag{3.3}$$

où on a noté $f^{(k)}(a_0)a_0^l$ le symbole formel associé naturellement à ce scalaire.

La relation (3.3) définit bien un symbole formel. En effet, comme on va le voir dans la proposition suivante, il se produit un phénomène de cancellation, de telle sorte que le second membre de (3.3) s'exprime sous la forme $\Sigma_{j\geqq 0}\, a_{f,j} X^j$, où $a_{f,j}$ est la somme d'un nombre fini $N(j)$ de termes.

Proposition 5. *$f(a_1,\cdots,a_\nu)$ est un symbole formel appartenant à $S_{\phi,\varphi}^{\max(mr,m'r),F}$, et son développement s'écrit*:

$$[f(a^1,\cdots,a^\nu)(x,\xi)](X) = \sum_{j\geqq 0} X^j a_{f,j}(x,\xi) \tag{3.4}$$

où les coefficients $a_{f,j}$ sont donnés par:

$$\begin{cases} a_{f,0} = f(a_0), \\ a_{f,1} = \langle \nabla f(a_0), a_1\rangle, \\ a_{f,j} = \displaystyle\sum_{|k|\leqq[3j/2]} D_{jk} f^{(k)}(a_0). \end{cases} \tag{3.5}$$

Les termes $D_{j,k}$ sont des polynômes fonctions des dérivées $\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_{\bar{j}}^i$, avec $0\leqq \bar{j}\leqq j$, $\alpha+\beta\leqq j$, $i=1,\cdots,\nu$, et vérifiant les estimations suivantes:

$$\forall j \geqq 2 \quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbf{N}^{2n} \quad \exists C_{j\alpha\beta}>0 \tag{3.6}$$

tel que, pour $|(x,\xi)|$ suffisamment grand, on ait:

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta D_{jk}(x,\xi)| \leqq C_{j\alpha\beta}\,|a_0|^{|k|}(\phi\varphi)^{-j/2}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|}.$$

DÉMONSTRATION. Cette proposition découle à la fois de l'étude formelle faite au paragraphe précédent, et d'un phénomène de cancellation que l'on démontre grâce à un lemme établi par R. S. Strichartz [12].

On peut écrire:

$$[f^{(k)}(a_0)a_0^l \# a^{(k-l)}](X) = \sum_{j\geq 0} X^j g_{k,l,j} \tag{3.7}$$

avec

$$g_{k,l,j} = \sum_{2|\alpha+\beta|+\iota=j} \frac{1}{\alpha!}\frac{1}{\beta!}(\tfrac{1}{2})^{|\alpha|}(-\tfrac{1}{2})^{|\beta|}\{\partial_\xi^\alpha D_x^\beta[f^{(k)}(a_0)a_0^l]\}[\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a_{k-l,\iota}] \tag{3.8}$$

où $a_{k-l,\iota}$ désigne la i^e composante du symbole formel $a^{(k-l)} = (a_1)^{(k_1-l_1)} \# \cdots \# (a_\nu)^{(k_\nu-l_\nu)}$. $g_{k,l,j}$ est un polynôme en l de degré inférieur ou égal à $\tilde{j}$.

Or R. S. Strichartz [12] énonce le lemme suivant:

LEMME 6 (Strichartz). *Soit q un polynôme en ν variables de degré strictement inférieur à $|\delta|$. Alors $\sum_{\gamma\leq\delta}(-1)^\gamma\binom{\delta}{\gamma}q(\gamma) = 0$.*

On déduit alors du lemme 6 que la somme (3.3) définissant $f(a_1, \cdots, a_\nu)$ s'écrit:

$$\left\{\begin{array}{l} [f(a_1,\cdots,a_\nu)(x,\xi)](X) = \sum_{j\geq 0} S_j(x,\xi)(X) \\ \\ \text{avec } [S_j(x,\xi)](X) = \sum_{|k|=j}\frac{1}{k!}\sum_{\tilde{j}\geq|k|} X^{\tilde{j}} \sum_{l\leq k}(-1)^l\binom{k}{l} g_{k,l,\tilde{j}}(x,\xi). \end{array}\right. \tag{3.9}$$

En effet: $\sum_{l\leq k}(-1)^l\binom{k}{l}q_{k,l,\tilde{j}}(x,\xi) = 0 \ \forall k : |k| > \tilde{j}$.

(3.9) permet alors d'exprimer $a_{f,j}$:

$$a_{f,j} = \sum_{2|\alpha+\beta|+\iota=j}\sum_{|k|\leq j}\frac{1}{k!}\sum_{l\leq k}(-1)^l\binom{k}{l}\frac{1}{\alpha!}\frac{1}{\beta!}(\tfrac{1}{2})^{|\alpha|}(-\tfrac{1}{2})^{|\beta|}\partial_\xi^\alpha D_x^\beta[f^{(k)}(a_0)a_0^l]\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_{k-l,\iota}. \tag{3.10}$$

Les premiers termes se calculent directement à l'aide de (3.10), et ce calcul conduit aux formules annoncées dans la proposition 5.

Pour $j \geqq 2$, on ordonne les termes de (3.10) suivant les dérivées $f^{(k')}(a_0)$, $|k'|$ variant de 0 à $[3j/2]$.

On obtient ainsi l'expression annoncée en (3.5), où D_{jk} ne dépend que des termes $(a_j^i)_{i=1,\cdots,\nu;j\geq 0}$ et de leurs dérivées.

Pour achever la démonstration de la proposition 5, il reste à vérifier l'estimation (3.6), ce qui se fait aisément en contrôlant les différents termes composant D_{jk} et en remarquant que $a_{k-l,i}$, i^e composante d'un symbole de $S_{\phi,\varphi}^{|k-l|m,F}$, vérifie:

$$|\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a_{k-l,i}| \leqq C_{\alpha\beta k} |a_0|^{|k|-|l|}(\phi\varphi)^{-i/2}\phi^{-|\beta|}\varphi^{-|\alpha|}. \tag{3.11}$$

Application à l'étude des termes S_j

Revenons alors à S_j, que l'on a défini en (1.6), et que l'on retrouve ici comme symbole associé au symbole formel $[S_j(x,\xi)](X)$. Alors:

$$S_j = \sum_{|k|=j} \frac{1}{k!} \sum_{|k|\leqq \tilde{j}} \sum_{l\leqq k} (-1)^l \binom{k}{l} g_{k,l,\tilde{j}} \tag{3.12}$$

et on a $g_{k,l,\tilde{j}} \in S_{\phi,\varphi}^{\max(mr,m'r)-\tilde{j}/2}$.

On en déduit alors, pour $\tilde{j} \geqq |k| = j$, $S_j \in S_{\phi,\varphi}^{\max(mr,m'r)-j/2}$, ce qui est bien le résultat annoncé.

IV. Estimation du reste

R_M est défini par linéarité et continuité par ses valeurs $R_{M,j}\varphi^j$ sur la base de fonctions propres (φ^j) $j \in \mathbf{N}$. On va, dans un premier temps, énoncer 2 lemmes permettant de voir ce qu'il faut exiger de $R_{M,j}\varphi^j$ pour que R_M ait la régularité annoncée.

(1°) Deux lemmes

On vérifie aisément le lemme suivant:

LEMME 7. *Soit $H_{\phi,\varphi}^s = \mathrm{Sp}\{u; u = Av$ avec $v \in L^2$ et $A \in \mathscr{L}_{\phi,\varphi}^{-s}\}$ l'espace défini par R. Beals* [1], *$\mathscr{L}_{\phi,\varphi}^{-s}$ étant l'espace des opérateurs ayant leur symbole dans $S_{\phi,\varphi}^{-s}$.*

Par ailleurs, on définit pour $s \geqq 0$: $E^s = D[(I+Q)^{s/2m}]$, où $Q = \Sigma_{i=1}^{\nu} P_i^2$, que l'on munit de la norme du graphe, et pour $s < 0$: $E^s = \mathrm{Im}[(I+Q)^{-s/2m}]$ dual de E^{-s}. $(I+Q)^{s/2m}$ est alors un isomorphisme de E^s sur L^2, et on a les inclusions algébriques et topologiques:

$$H_{\phi,\varphi}^s \hookrightarrow E^s \hookrightarrow H_{\phi,\varphi}^{sm'/m} \quad \text{si } s \geqq 0,$$

$$H_{\phi,\varphi}^{sm'/m} \hookrightarrow E^s \hookrightarrow H_{\phi,\varphi}^s \quad \text{si } s < 0.$$

Grâce au lemme 7, on a construit une chaîne d'espaces s'emboîtant dans les espaces $H_{\phi,\varphi}^s$. Pour démontrer le résultat annoncé, il suffit donc de prouver:

$$\forall N \in \mathbf{N} \quad \exists M: \qquad R_M \in \mathscr{L}(E^{-N}, E^N). \tag{4.1}$$

E^s est muni de la norme du graphe:

$$\|u\|_s^2 \approx \sum_{j\in\mathbf{N}} (1+|\lambda^j|^2)^{s/m} |a(j)|^2 \tag{4.2}$$

où $u \in \mathscr{S}'$, $a(j) = \langle u, \bar{\varphi}^j \rangle$, le crochet désignant la dualité $\langle \mathscr{S}', \mathscr{S} \rangle$. En particulier, il existe des constantes C_1, $C_2 > 0$ telles que:

$$C_1(1+|\lambda^j|^2)^{s/2m} \leqq \|\varphi^j\|_s \leqq C_2(1+|\lambda^j|^2)^{s/2m}. \tag{4.3}$$

Le lemme suivant, dû à R. Strichartz, énonce une condition suffisante pour avoir (4.1):

LEMME 8 (R. Strichartz [12]). *Soit $(T_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une famille d'opérateurs envoyant $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$. On suppose qu'il existe C et s positifs indépendants de j, tels que:*

$$\|T_j\varphi^j\|_s \leqq C\|\varphi^j\|_{-s} \qquad \forall j \in \mathbf{N}. \tag{4.4}$$

Soit u une combinaison linéaire finie de fonctions propres: $u = \Sigma_{j\in\mathbf{N}}\, a(j)\varphi^j$ avec $a(j) = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices j.

On définit Tu par:

$$Tu = \sum_{j\in\mathbf{N}} a(j) T_j \varphi^j. \tag{4.5}$$

Alors T se prolonge en un opérateur linéaire continu de E^{-s+j_0} dans E^{s-j_0}, où j_0 est un réel quelconque supérieur strictement à $2n$, c'est-à-dire que l'on a:

$$\exists C > 0: \qquad \|Tu\|_{s-j_0} \leqq C\|u\|_{-s+j_0}. \tag{4.6}$$

(2°) Il s'agit maintenant de prouver (4.4) *pour R_M*

On va tout d'abord supposer que les opérateurs sont tous d'ordre $\frac{1}{4}$. Puis on va se ramener à ce cas là.

(a) $m = \frac{1}{4}$

(i) En suivant R. Strichartz, on pose:

$$\sigma_{k,j}(x,\xi) = \frac{f^{(k)}\left[a_0\left(\frac{x+y}{2},\xi\right) + t\left(\lambda^j - a_0\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)\right)\right]}{\left[1+\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda_i^j - a_0^i)^2\right]^K} \tag{4.7}$$

où K est un entier que l'on choisira ultérieurement.

LEMME 9. *Pour $|k| \geqq r$, on peut trouver $K \in \mathbf{N}$ tel que $\sigma_{k,j} \in S^{r/2-|k|/2}_{\phi_1,\varphi_1}$ où $\phi_1 = \phi[\phi\varphi]^{-1/4}$ et $\varphi_1 = \varphi[\phi\varphi]^{-1/4}$ sont encore des fonctions poids satisfaisant à* (H$_2$).

Plus précisément, on a l'estimation suivante:

$$(4.8)\qquad \exists C_{k\alpha\beta}>0: \qquad |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \sigma_{k,j}| \leqq C_{k\alpha\beta}(\phi_1\varphi_1)^{(r-|k|)/2}\phi_1^{-|\alpha|}\varphi_1^{-|\beta|},$$

où $C_{k\alpha\beta}$ est indépendant de j et de $t \in [0,1]$.

DÉMONSTRATION. On peut écrire:

$$\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \sigma_{k,j}(x,\xi) = \sum_{\substack{\gamma+\gamma'=\alpha\\ \delta+\delta'=\beta}} \partial_\xi^\gamma D_x^\delta f^{(k)}(a_0+t(\lambda^j-a_0)) \times \partial_\xi^{\gamma'} D_x^{\delta'}\left[\left(1+\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda_i^j-a_0^i)^2\right)^{-K}\right]. \tag{4.9}$$

On va montrer successivement que l'on a:

(4.10) $\exists C_{k\gamma\delta}>0$, indépendant de j et de $t\in[0,1]$ tel que:

$$|\partial_\xi^\gamma D_x^\delta f^{(k)}(a_0+t(\lambda^j-a_0))| \leqq C_{k\gamma\delta}(\phi_1\varphi_1)^{(r-|k|)/2}\phi_1^{-|\gamma|}[1+|\lambda^j-a_0|]^{|k|-r}$$

et

(4.11) $\exists C_{kK\gamma'\delta'}>0$, indépendant de j, tel que:

$$\left|\partial_\xi^{\gamma'} D_x^{\delta'}\left[\left(1+\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda_i^j-a_0^i)^2\right)^{-K}\right]\right| \leqq C_{kK\gamma'\delta'}\phi_1^{-|\gamma'|}\varphi_1^{-|\delta'|}(1+|\lambda^j-a_0|)^{-2K}.$$

Alors, en fixant $K \geqq \frac{1}{2}(|k|-r)$, on en déduira le lemme 9.

Pour prouver (4.10) on écrit:

$$\begin{aligned}&\partial_\xi^\gamma D_x^\delta f^{(k)}(a_0+t(\lambda^j-a_0))\\ &= \sum_{\substack{\gamma_{11}+\cdots+\gamma_{\nu l_\nu}=\gamma\\ \delta_{11}+\cdots+\delta_{\nu l_\nu}=\delta\\ 1\leqq|l|\leqq|\gamma|+|\delta|}} (1-t)^{|l|}f^{(k+l)}(a_0+t(\lambda^j-a_0))\partial_\xi^{\gamma_{11}}D_x^{\delta_{11}}a_0^1\times\cdots\\ &\qquad\times\partial_\xi^{\gamma_1 l_1}D_x^{\delta_1 l_1}a_0^1\times\cdots\times\partial_\xi^{\gamma_\nu 1}D_x^{\delta_\nu 1}a_0^\nu\times\cdots\times\partial_\xi^{\gamma_\nu l_\nu}D_x^{\delta_\nu l_\nu}a_0^\nu.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Compte tenu de l'hypothèse (0.3), on déduit de (4.12) l'estimation:

$$|\partial_\xi^\gamma D_x^\delta f^{(k)}(a_0+t(\lambda^j-a_0))| \leqq C_{k\gamma\delta}\sum_{|l|\leqq|\gamma|+|\delta|}(1+|a_0+t(\lambda-a_0)|)^{r-|k|-|l|}|a_0|^{|l|}\phi^{-|\gamma|}\varphi^{-|\delta|}. \tag{4.13}$$

On utilise alors l'inégalité de Peetre pour obtenir:

$$|\partial_\xi^\gamma D_x^\delta f^{(k)}(a_0+t(\lambda^j-a_0))| \leqq C_{k\gamma\delta}(1+|a_0|)^{r-|k|}(1+|\lambda^j-a_0|)^{|k|-r}|a_0|^{|l|}\phi^{-|\gamma|}\varphi^{-|\delta|}. \tag{4.14}$$

En utilisant le fait que

$$|a_0| \leqq C(\phi\varphi)^{1/4} = C(\phi_1\varphi_1)^{1/2} \tag{4.15}$$

et en remarquant que l'on a la majoration

$$(4.16) \qquad (\phi\varphi)^{|l|/4}\phi^{-|\gamma|}\varphi^{-|\delta|} \leqq \phi_1^{-|\gamma|}\varphi_1^{-|\delta|} \qquad \text{pour } |l| \leqq |\gamma| + |\delta|$$

(puisque $\phi\varphi \geqq 1$), on déduit alors (4.10) de (4.14).

L'estimation (4.11) se démontre de manière analogue.

(ii) *Etudions alors* R_M. $R_{M,j}$ est l'opérateur associé au symbole de Weyl:

$$(4.17) \quad r_{M,j}(x,\xi) = M \sum_{|k|=M} \int_0^1 \frac{1}{k!}\sigma_{k,j}(x,\xi)\left(1 + \sum_{i=1}^{\nu}(\lambda_i^j - a_0^i)^2\right)^K (\lambda^j - a_0)^k (1-t)^M dt.$$

On peut regrouper les termes en λ^j et les écrire sous la forme:

$$(4.18) \qquad \sum_{\gamma \geqq k} c_\gamma (\lambda^j - a_0)^\gamma = \sum_{\substack{k \leqq \gamma \\ |\gamma| < 2K+M}} c_\gamma \sum_{\delta \leqq \gamma} (-1)^\delta \binom{\gamma}{\delta} a_0^\delta (\lambda^j)^{(\gamma-\delta)}$$

où l'on va utiliser encore:

$$(\lambda^j)^{(\gamma-\delta)}\varphi^j = P^{(\gamma-\delta)}\varphi^j$$

(avec les conventions faites dans le paragraphe précédent).

Cela conduit à écrire $R_{M,j}$ comme opérateur dont le symbole de Weyl est:

$$(4.19) \qquad \tilde{r}_{M,j} = M \sum_{|k|=M} \int_0^1 \frac{(1-t)^M}{k!} \sum_{\gamma \geqq k} C_\gamma \sum_{\delta \leqq \gamma} (-1)^\delta \binom{\gamma}{\delta} \sigma_{k,j} a_0^\delta \# a^{(\gamma-\delta)} dt$$

où $\#$ désigne la composition des symboles de Weyl.

En développant l'expression de $a_0^\delta \# a^{(\gamma-\delta)}$, on obtient $\tilde{r}_{M,j}$ sous la forme:

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \tilde{r}_{M,j} = M \sum_{|k|=M} \int_0^1 \frac{(1-t)^M}{k!} \sum_{\gamma \geqq k} C_\gamma \sum_{\delta \leqq \gamma} (-1)^\delta \binom{\gamma}{\delta} \sum_{|\alpha+\beta|<M'} \frac{(\frac{1}{2})^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{(-1/2)^{|\beta|}}{\beta!} \partial_\xi^\alpha D_x^\beta(\sigma_{k,j} a_0^\delta) \\ \times \partial_\xi^\beta D_x^\alpha (a^{(\gamma-\delta)}) dt + \tau_{M,M',j}. \end{aligned}$$

On va alors prouver que $\tilde{r}_{M,j}$ vérifie le lemme suivant:

LEMME 10. *$\tilde{r}_{M,j}$ appartient à $S_{\phi_1,\varphi_1}^{-M/4}$ dès que M est choisi supérieur à r. Plus précisément, on a l'estimation:*

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbf{N}^{2n} \quad \exists C_{M\alpha\beta} > 0 \quad \textit{tel que}, \quad \forall j \in \mathbf{N}, \quad \forall (x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n:$$

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \tilde{r}_{M,j}| \leqq C_{M\alpha\beta}(\phi_1\varphi_1)^{-M/4}\phi_1^{-|\alpha|}\varphi_1^{-|\beta|}.$$

$C_{M\alpha\beta}$ étant indépendant de j.

DÉMONSTRATION. Les termes qui contribuent à (4.20) vérifient:

$$(4.21) \qquad |\partial_\xi^{\tilde\alpha} D_x^{\tilde\beta}[\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \sigma_{k,j} a_0^\delta \times \partial_\xi^\beta D_x^\alpha a^{(\gamma-\delta)}]| \leqq C_{\tilde\alpha\tilde\beta M'}(\phi_1\varphi_1)^{(r-M-|\alpha+\beta|)/2}\phi_1^{-|\tilde\alpha|}\varphi_1^{-|\tilde\beta|}.$$

En effet, on vérifie facilement l'estimation:

$$\left|\partial_\xi^{\bar\alpha} D_x^{\bar\beta}\left(\partial_\xi^\alpha D_x^\beta(\sigma_{k,j} a_0^\delta) \times \partial_\xi^\beta D_x^\alpha a^{(\gamma-\delta)}\right)\right| \leqq C_{\alpha\beta\bar\alpha\bar\beta}\,(\phi_1\varphi_1)^{(r-M)/2+|\gamma|/2-3|\alpha+\beta|/2}\phi_1^{-|\bar\alpha|}\varphi_1^{-|\bar\beta|}. \tag{4.22}$$

D'autre part, on a encore un phénomène de cancellation: En effet, la somme

$$T_{j,\gamma} = \sum_{|\alpha+\beta|=j} \frac{(1/2)^{|\alpha|}}{\alpha!}\frac{(-1/2)^{|\beta|}}{\beta!}(\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \sigma_{k,j} a_0^\delta)(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a^{(\gamma-\delta)})$$

est un polynôme de degré $2|\alpha+\beta|$ en δ, que l'on note $P_j(\delta)$, et donc la somme qui figure dans (4.20):

$$\sum_{\delta\leqq\gamma}(-1)^\delta\binom{\gamma}{\delta}P_j(\delta)$$

est nulle pour tout γ tel que $2|\alpha+\beta|<|\gamma|$.

En utilisant alors dans (4.22) que l'on a $|\gamma|\leqq 2|\alpha+\beta|$, on obtient exactement (4.21).

Grâce au phénomène de cancellation, on peut réécrire $\tilde r_{M,j}$ sous la forme:

$$\begin{aligned}\tilde r_{M,j} &= M\sum_{|k|=M}\int_0^1\frac{(1-t)^M}{k!}\sum_{0\leqq j\leqq M'}\sum_{\substack{k\leqq\gamma\\|\gamma|\leqq 2j}}(-1)^\delta\binom{\gamma}{\delta}T_{j,\gamma}dt+\tau_{M,M',j}\\ &= M\sum_{|k|=M}\int_0^1\frac{(1-t)^M}{k!}\Bigg(\sum_{M/2\leqq j\leqq M'}\sum_{\substack{k\leqq\gamma\\|\gamma|\leqq 2j}}(-1)^\delta\binom{\gamma}{\delta}T_{j,\gamma}dt+\tau_{M,M',j}.\end{aligned}\tag{4.23}$$

(En effet on a $M=|k|\leqq|\gamma|\leqq 2j$.)

$T_{j,\gamma}$ appartient à $S_{\phi_1,\varphi_1}^{(r-M-j)/2}$ d'après (4.21), les majorations des semi-normes correspondantes étant indépendantes de j.

On en déduit alors que la somme apparaissant dans $\tilde r_{M,j}$ appartient à $S_{\phi_1,\varphi_1}^{r/2-M/2-M/4}$, et donc à $S_{\phi_1,\varphi_1}^{-M/4}$ si $M>r$, les semi-normes étant encore majorées par des constantes indépendantes de j.

Pour estimer $\tau_{M,M',j}$, on remarque que $\sigma_{k,j}a_0^\delta\in S_{\phi_1,\varphi_1}^{(r-M)/2+|\delta|/2}$, les semi-normes étant majorées par des constantes indépendantes de j, et $a^{(\gamma-\delta)}\in S_{\phi_1,\varphi_1}^{(|\gamma|-|\delta|)/2}$. Alors, d'après la continuité de la loi de composition, $\tau_{M,M',j}$ appartient à $S_{\phi_1,\varphi_1}^{(r-M+|\gamma|)/2-M'}$, les semi-normes correspondantes étant majorées par des constantes indépendantes de j. Par ailleurs, on a $|\gamma|\leqq 2K+M$, et K pouvant être choisi égal à $M/2$ ou $(M+1)/2$ est majoré par M. On en déduit que $\tau_{M,M',j}$ appartient à $S_{\phi_1,\varphi_1}^{(r-M)/2+K+M/2-M'}$, donc à $S_{\phi_1,\varphi_1}^{-M/4}$ si M est choisi supérieur à r et M' supérieur à $2M$, les semi-normes étant majorées par des constantes indépendantes de j. La démonstration du lemme 10 est ainsi achevée. Alors, il résulte des théorèmes de continuité dans les espaces $H^s_{\Phi,\varphi}$ que pour tout $s \in \mathbf{R}$, il existe une constante C_{sM} indépendante de j telle que

$$\|\tilde{r}_{M,j}\varphi'\|_{H^{s+M/4}_{\Phi_1,\varphi_1}} \leqq C_{sM}\|\varphi'\|_{H^s_{\Phi_1,\varphi_1}}. \tag{4.24}$$

Comme $(I+Q)^{s/2m} = (I+Q)^{2s}$ est un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole appartient à $S^{2s}_{\Phi_1,\varphi_1}$, on déduit du lemme 7 les inclusions algébriques et topologiques:

$$\begin{cases} H^{2s}_{\Phi_1,\varphi_1} \hookrightarrow E^s \hookrightarrow H^{2s(4m')}_{\Phi_1,\varphi_1} & \text{si } s \geqq 0, \\ H^{2s(4m')}_{\Phi_1,\varphi_1} \hookrightarrow E^s \hookrightarrow H^{2s}_{\Phi_1,\varphi_1} & \text{si } s < 0. \end{cases} \tag{4.25}$$

On déduit de (4.24) et (4.25) l'existence d'une constante $C_{sM'} > 0$, indépendante de j, telle que:

$$\|\tilde{r}_{M,j}\varphi'\|_{s/2+M/8} \leqq C'_{sM}\|\varphi'\|_{s/2}.$$

Pour tout $s > 0$, il existe donc M tel que $\tilde{r}_{M,j}$ vérifie (4.4). Le lemme 8 permet alors de conclure.

(b) *Cas général*

Si les opérateurs P_i sont d'ordre m, on écrit $f(P_1, \cdots, P_\nu)$ sous la forme $\tilde{f}[(I+Q)^{(1-4m)/8m}P_1, \cdots, (I+Q)^{(1-4m)/8m}P_\nu]$ où $(I+Q)^{(1-4m)/8m}$ est un opérateur pseudodifférentiel d'après [9], et où $\tilde{f}$ vérifie encore (0.3). $f(P_1, \cdots, P_\nu)$ est donc un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole admet un développement asymptotique sous la forme $\Sigma_{j\geqq 0}\, a_{\tilde{f},j}$, les $a_{\tilde{f},j}$ vérifiant les relations (0.7) (avec $\tilde{f}$ et $\tilde{p}$).

En réécrivant dans $a_{\tilde{f},j}$ les dérivées $\tilde{f}^{(k)}(\tilde{a}_0)$ à l'aide des $f^{(h)}(a_0)$, on obtient nécessairement pour $a_{\tilde{f},j}$ la forme annoncée en (0.7) avec f et p.

Remarque 1. Il résulte facilement de ce qui précède que, si a'_j est homogène de degré $2m-j$, et si f est homogène de degré r, alors $D_{jh}(p)$ est homogène de degré $(2m|h|-j)$, et donc $a_{f,j}$ est homogène de degré $2mr-j$.

Remarque 2. Supposons qu'il existe des entiers k et l, $\geqq 1$, tels que $\forall i = 1, \cdots, \nu$, $\forall j \in \mathbf{N}$, on ait:

$$a'_j(\rho^k x, \rho^l \xi) = \rho^{2m-j} a'_j(x,\xi)$$

pour tout $\rho > 0$ et tout (x,ξ) dans $\mathbf{R}^{2n}\setminus\{0\}$. ($a'_j$ est "quasi-homogène" de degré $2m-j$.)

Alors, $D_{jh}(p)$ peut être choisi quasi-homogène de degré $2m|h|-j$, et, si f est homogène de degré r, $a_{f,j}$ est quasi-homogène de degré $2mr-j$.

REMARQUE 3. Le résultat de la remarque 2 subsiste si on fait seulement sur f l'hypothèse suivante:

$$f(z)=f_r(z)+f_{r-1}(z)+\cdots+f_{r-M}(z)+G_M(z)$$

où f_{r-j} est homogène de degré $r-j$, et où G_M vérifie:

$$|G_M^{(\alpha)}(z)|\leqq C_{\alpha M}(1+z)^{r-M-1-|\alpha|}.$$

REMARQUE 4. Dans [3] on étudie le comportement asymptotique de Λ.

V. Application

THÉORÈME 2. *On suppose vérifiées les hypothèses* (H_1) *à* (H_5), *et on désigne par* Γ *un cône de sommet* 0 *contenant l'adhérence de l'image du symbole principal joint* $a_0=(a_0^1,\cdots,a_0^\nu)$.

soit C *un cône fermé de* R^ν, *de sommet* 0, *tel que* $C\cap\Gamma=\{0\}$. *Alors* $C\cap\Lambda$ *est fini.*

DÉMONSTRATION. C et Γ sont deux fermés de $\mathbf{R}^\nu$. Leurs intersections avec la sphère unité S sont des compacts disjoints que l'on peut séparer par une fonction $\tilde{f}$, C^∞ sur S, égale à 0 sur $C\cap S$ et à 1 sur $\Gamma\cap S$. En posant: $f_1(z)=\tilde{f}(z/|z|)$, on définit alors sur $\dot{\mathbf{R}}^\nu$ une fonction f_1, homogène de degré 0, C^∞ sur $\dot{\mathbf{R}}^\nu$, égale à 0 sur C et à 1 sur Γ.

On note f une fonction égale à f_1 à l'extérieur d'un voisinage V de 0 et C^∞ sur $\mathbf{R}^\nu$ tout entier.

On déduit alors du théorème 1 et de l'hypothèse (H_3) que $\mathcal{F}=f(P_1,\cdots,P_\nu)$ est un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole principal $f(a_0)$ vaut 1 pour $|(x,\xi)|$ suffisamment grand. Soit alors F le sous-espace fermé de $L^2(\mathbf{R}^n)$ engendré par l'ensemble $\{\varphi^j;\lambda^j\in C'\cap\Lambda\}$, où $C'=C\cap\complement V$. Soit $u\in F$.

On peut écrire:

$$u=\sum_{j\in\mathbf{N}}u_j\varphi^j,\qquad \text{avec } u_j=0 \text{ si } \lambda^j\notin C'$$

et

$$\mathcal{F}u=\sum_{j\in\mathbf{N}}u_jf(\lambda^j)\varphi^j=0\quad\text{puisque}\quad f_{|C'}=0.$$

On déduit alors de [1] que u est dans $\mathcal{S}$.

F est donc un sous-espace algébrique de E^1. Comme l'injection de E^1 dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ est compacte, et que celle de F dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ est continue, l'injection de F dans E^1 est également continue, et donc celle de F dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ est compacte.

Comme F est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbf{R}^n)$, sa boule unité est compacte et F est de dimension finie, ce qui prouve que $\Lambda \cap C'$, et donc aussi $\Lambda \cap C$, est une partie finie de Λ.

Bibliographie

1. R. Beals, *A general calculus of pseudodifferential operators*, Duke Math. J. **42** (1975), 1–42.

2. L. Boutet de Monvel and P. Kree, *Pseudodifferential operators and Gevrey classes*, Ann. Inst. Fourier **17** (1967), 295–323.

3. A. M. Charbonnel, *Spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels sur R^n, qui commutent*, à paraître.

4. Y. Colin de Verdière, *Spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent. I — le cas non intégrable*, Duke Math. J. **46** (1979), 169–182.

5. J. Dunau, *Fonctions d'un opérateur elliptique sur une variété compacte*, J. Math. Pures Appl. **56** (4) (1977).

6. B. Grammaticos and A. Voros, *Semi-classical approximations of nuclear hamiltonians. I — Spin independent potentials*, Ann. Phys. **123** (1979), 359–380.

7. B. Helffer and D. Robert, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, Exposé n° 2 (octobre 80) et *Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudodifférentiels sur R^n*, à paraître.

8. L. Hörmander, *The Weyl calculus of pseudodifferential operators*, Comm. Pure Appl. Math. **32** (1979), 359–443.

9. D. Robert, *Propriétés spectrales d'opérateurs pseudodifférentiels*, Commun. Partial Differ. Equ. **3** (9) (1978), 755–826.

10. D. Robert, *Calcul fonctionnel sur les opérateurs admissibles et application*, à paraître.

11. R. T. Seeley, *Complex powers of an elliptic operator*, in *Singular Integrals*, Proc. Symposia Pure Math. 10, Am. Math. Soc., 1967, pp. 288–307.

12. R. S. Strichartz, *A functional calculus for elliptic pseudodifferential operators*, Am. J. Math. **94** (1972), 711–722.

13. A. Voros, *An algebra of pseudodifferential operators and the asymptotics of quantum mechanics*, J. Funct. Anal. **29** (1) (1978), 104–132.

ERA CNRS N° 946
Université de Nantes
Institut de Mathématiques et d'Informatique
2, chemin de la Houssinière
44072 Nantes Cédex, France